doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2023.02.034

Huber M 估计在CPIII高程网平差中的抗差性分析

林　飞[1]，史国强[1]
（1. 杭州市勘测设计研究院有限公司，浙江 杭州 310012）

摘　要：高铁CPIII高程网作为一种高精度水准网，其平差一般都是通过最小二乘法求取，然而因为最小二乘估计不具备抗粗差的能力，如果测量数据中存在粗差，则计算结果将会受到严重的影响。因此，引入基于Huber函数的M估计进行CPIII高程控制网的粗差探测，并通过给Huber法的调和系数赋予不同的值，来分析调和系数的改变对Huber法的影响。

关键词：CPIII高程控制网；粗差；Huber法；调和系数
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2023）02-0158-03

Robustness Analysis of Huber M Estimation in CPIII Elevation Network Adjustment

LIN Fei[1], SHI Guoqiang[1]
(1. Hangzhou Geotechnical Engineering &Surveying Research Institute Co., Ltd., Hangzhou 310012, China)

Abstract: CPIII elevation network in high-speed railway is a precision leveling network. The result of leveling network can be obtained by the least squares method. However, if there are some gross errors in the measurement data, the results will be affected seriously because the least squares estimation does not have the ability to against gross errors. In this paper, we introduced Huber M estimation into the surveying adjustment of CPIII elevation network to achieve the target that detecting and eliminating gross errors, and analyzed the influence of harmonic coefficient's change on Huber method by assigning different values to harmonic coefficient.

Key words: CPIII elevation control network, gross errors, Huber method, harmonic coefficient

CPIII高程控制网是CPIII三维控制网中的重要一环，相对精度很高，主要为了满足高铁及城市轨道交通对铺轨施工的高要求，在高铁CPIII高程网的外业施测中，目前采用最多的以及精度最高的方法主要是矩形法[1]。如图1所示，图中的实心箭头主要表示高差的传递方向。通过对矩形法的精度估算，可以认为无论在纵向、横向还是对角方向，其中任意相邻CPIII高程点的高差中误差均具有较高的精度，完全能够满足轨道控制网CPIII建网精度的要求。而在城市轨道交通的CPIII高程网外业施测中，目前主要用的方法是三角高程测量。传统的水准网平差一般都是通过最小二乘法求取，然而因为最小二乘估计不具备抗粗差的能力，如果测量数据中存在粗差，则计算结果将会受到严重的影响，其估计值会因为粗差的影响而严重偏离正确值。因此本文研究的目的，主要是引入Huber函数的稳健估计到CPIII高程网平差中进行粗差探测，并结合数据探讨调和系数的变化对Huber法的具体影响。

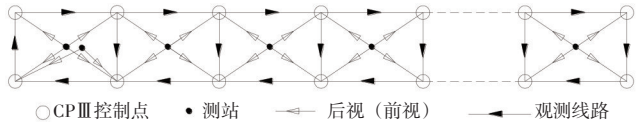


图1　矩形法示意图

1　稳健估计原理

M估计是稳健估计的一种，又叫做极大似然估计，稳健估计在测量中也被称作抗差估计，其正是鉴于最小二乘法对粗差的敏感性而被提出的，主要用来消除或减弱粗差对参数估计的影响[2]。其核心思想是，在无法避免粗差影响的情况下，通过构造合理的估计方法来尽可能减少粗差对参数的估值的不良影响，得出最优或接近最优的参数估值[3-4]。稳健估计基本可以分为三类，即M估计、L估计和R估计[5]。它是经典的极大似然估计的推广，易于程序实现，所以本文主要探讨的是M估计。

设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 为观测样本，且 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 之间相互独立；X 为待估参数。L_i 的分布密度为

收稿日期：2021-10-12。
项目来源：杭州市钱江新城投资集团有限公司科创基金项目（QT202208A001）。

$f(l_i,\hat{X})$，则其极大似然估计准则为：

$$\sum_{i=1}^{n}\ln f(l_i,\hat{x})=\max \tag{1}$$

式中，$\hat{x}$ 为 X 的估值。

令函数

$$\rho(l_i,\hat{x})=-\ln f(l_i,\hat{x}) \tag{2}$$

则式（2）就可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(l_i,\hat{x})=\min \tag{3}$$

再令

$$\varphi(l_i,\hat{x})=\frac{\partial\rho(l_i,x)}{\partial x}$$

则可得

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(l_i,\hat{x})=0 \tag{4}$$

通过选择合适的 ρ 函数或 φ 函数，再利用式（3）或式（4）来计算参数 X 的估值，即M估计[6]。

由上述可知 ρ 函数的重要性，一个 ρ 函数就定义了一个M估计。为此，国内外的学者们提出了很多可供选择的 ρ 函数，常用的 ρ 函数主要有Huber法、L_1-L_2 法、丹麦法、IGG方案以及Fair法等[7]，本文主要研究的是Huber法，其 ρ 函数为：

$$\rho(u)=\begin{cases}\dfrac{u^2}{2} & |u|\le c\\ c\left(|u|-\dfrac{c}{2}\right) & |u|>c\end{cases} \tag{5}$$

权函数为：

$$p(u)=\begin{cases}1 & |u|\le c\\ \dfrac{c}{|u|} & |u|>c\end{cases} \tag{6}$$

式中，u 为标准化的残差指标（$u_i=v_i/\sigma$）；c 为调和系数。

2　算例分析

2.1　概　况

选取某项目的一段CPIII高程网的实测数据如表1所示，其中153H21点为线上水准已知点，起算高程为514.289 6 m，选取10个CPIII点，以测段距离来定权，取1 km为单位权观测。

由水准观测线路可先确定各CPIII点的初始高程值，将表1的数据及起算点高程值编辑到程序可以读取的txt文本中，然后用所编程序进行解算。取未加粗差的经典最小二乘法的计算结果作为正确值。

2.2　加入一个粗差时不同系数的影响

为方便讨论问题，在原观测数据的线路L4中加入10 mm（远大于两倍中误差）的粗差，即观测高差变成0.186 34 m，在一个粗差的情况下，分别取系数为1、1.5、1.8、2、2.5时的计算结果进行对比。首先是不同系数下的Huber法以及最小二乘法计算的残差 V 的对比，如表2所示。

表1　原始观测数据

水准线路	观测高差/m	路线长度/m	权
L0:153H21–153314	–0.308 14	38.71	25.83
L1:153313–153315	–0.901 89	65.47	15.27
L2:153315–153316	–0.185 31	9.22	108.46
L3:153316–153314	0.911 01	65.47	15.27
L4:153314–153313	0.176 34	9.22	108.46
L5:153315–153317	–0.910 5	65.44	15.28
L6:153317–153318	–0.197 04	9.22	108.46
L7:153318–153316	0.922 26	65.44	15.28
L8:153317–153319	–0.850 4	65.44	15.28
L9:153319–153320	–0.223 67	9.22	108.46
L10:153320–153318	0.877 63	65.44	15.28
L11:153319–153321	–0.966 95	65.41	15.29
L12:153321–153322	–0.169 94	9.22	108.46
L13:153322–153320	0.913 43	65.41	15.29

表2　不同系数情况下Huber法计算的残差V的对比/mm

水准线路	系数1.0	系数1.5	系数1.8	系数2	系数2.5	最小二乘估计
L0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.00
L1	0.00	0.00	0.00	0.00	–2.73	–4.47
L2	–0.19	–0.15	–0.15	–0.15	–2.15	–0.59
L3	0.50	0.50	0.50	0.50	–2.23	–4.47
L4	9.84	9.80	9.80	9.80	17.27	–0.63
L5	0.00	–0.05	–0.05	–0.05	–0.79	–0.31
L6	–0.38	–0.25	–0.25	–0.25	–0.78	0.00
L7	0.22	0.19	0.19	0.19	–0.55	–0.31
L8	0.00	–0.19	–0.19	–0.19	–0.38	–0.29
L9	0.00	–0.09	–0.09	–0.09	–0.24	–0.03
L10	0.22	0.63	0.63	0.63	0.44	–0.29
L11	0.00	–0.10	–0.10	–0.10	–0.15	–0.11
L12	0.00	–0.10	–0.10	–0.10	–0.15	–0.02
L13	0.21	0.32	0.32	0.32	0.27	–0.11

不同系数下的Huber法以及最小二乘法计算的高程值与正确值之差如表3所示。

表3　不同系数Huber法计算的高程值与正确值之差的对比/mm

点号	系数1.0	系数1.5	系数1.8	系数2	系数2.5	最小二乘估计
153313	–0.12	–0.17	–0.17	–0.17	7.30	9.41
153314	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
153315	–0.08	–0.13	–0.13	–0.13	4.61	4.98
153316	–0.08	–0.08	–0.08	–0.08	2.65	4.39
153317	–0.23	–0.14	–0.14	–0.14	3.86	4.72
153318	0.09	–0.07	–0.07	–0.07	3.39	4.65
153319	0.12	–0.17	–0.17	–0.17	3.64	4.58
153320	0.17	–0.21	–0.21	–0.21	3.45	4.61
153321	0.19	–0.20	–0.20	–0.20	3.56	4.55
153322	0.25	–0.24	–0.24	–0.24	3.47	4.59

由表2和表3可以看出：

1）在加入一个粗差的情况下，系数取1.5、1.8和2的计算结果是一致的。

2）在系数不超过2的前提下，Huber法残差V中所体现的粗差大小和位置，与实际所添加的粗差大小和位置十分吻合，充分说明稳健估计良好的粗差探测能力，而最小二乘法以及系数取为2.5时的Huber法的残差阵无法看出实际添加的粗差的位置和大小。

3）当有一个粗差时，最小二乘法以及系数取为2.5时，Huber法的计算结果已偏离了正确值，而系数值取小于等于2时，计算结果都与正确值相差很小，此时Huber法的抗粗差效果不受影响。

综上可知，当加入一个粗差时，Huber法的调和系数在小于等于2的情况下最优。

2.3 加入两个粗差时不同系数的影响

为方便讨论问题，再在原始数据线路L8上加入10 mm的粗差（远大于两倍中误差），然后分别取调和系数的值为0.5、1、1.5、1.8、2、2.5时的计算结果进行对比。

不同系数下的计算高程值与正确值之差如表4所示。

表4 不同系数Huber法计算的高程值与正确值之差的对比/mm

点号	系数0.5	系数1.0	系数1.5	系数1.8	系数2	系数2.5	最小二乘估计
153313	−0.12	−0.14	−0.12	7.11	7.11	7.11	9.40
153314	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01
153315	−0.07	−0.08	−0.06	4.23	4.23	4.23	4.96
153316	−0.08	−0.08	−0.08	2.85	2.85	2.85	4.40
153317	−0.03	−0.05	−0.04	2.72	2.72	2.72	4.42
153318	−0.13	−0.12	−0.12	4.35	4.35	4.35	4.94
153319	−0.50	−0.53	−0.55	9.62	9.62	9.62	9.87
153320	−0.45	−0.41	−0.47	7.28	7.28	7.28	9.32
153321	−0.43	−0.51	−0.53	8.82	8.82	8.82	9.57
153322	−0.38	−0.45	−0.53	8.01	8.01	8.01	9.57

不同系数时所求得的残差V如表5所示。由表4和表5可以得出以下结论：

1）在加入一个粗差的情况下，系数取1.8、2和2.5的计算结果是一致的。

2）当系数取大于1.5的时候，Huber法的计算结果偏离了正确值，而系数值取小于等于1.5时得计算结果都与正确值相差很小。

3）当系数不超过1.5时，Huber法的残差V所体现出的粗差大小和位置，与实际所添加的粗差大小和位置十分吻合，而系数大于1.5时的Huber法的残差阵无法看出实际添加的粗差的位置和大小

因此，当加入两个粗差时，Huber法的调和系数的取值在小于等于1.5的情况下最优。

表5 不同系数情况下Huber法计算的残差V的对比/mm

水准线路	系数0.5	系数1.0	系数1.5	系数1.8	系数2	系数2.5
L0	0.08	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08
L1	0.01	0.01	0.00	−2.93	−2.93	−2.93
L2	−0.20	−0.16	−0.19	−1.57	−1.57	−1.57
L3	0.50	0.50	0.50	−2.43	−2.43	−2.43
L4	9.85	9.84	9.84	17.07	17.07	17.07
L5	0.00	−0.01	−0.01	−1.55	−1.55	−1.55
L6	−0.41	−0.36	−0.39	1.32	1.32	1.32
L7	0.24	0.21	0.23	−1.31	−1.31	−1.31
L8	9.37	9.34	9.34	16.75	16.75	16.75
L9	0.00	0.05	0.05	−2.39	−2.39	−2.39
L10	0.82	0.82	0.82	−2.43	−2.43	−2.43
L11	0.00	−0.03	−0.05	−0.87	−0.87	−0.87
L12	0.00	−0.07	−0.05	−0.87	−0.87	−0.87
L13	0.21	0.39	0.37	−0.45	−0.45	−0.45

3 结 论

综合加入一个粗差和2个粗差这2种情况下的结果分析，可以得出结论，调和系数的取值范围会极大的影响Huber法的抗粗差性，且调和系数的取值在小于等于1.5的情况下是最优的。在调和系数取值合适的情况下，Huber法具有优良的抗粗差性。

本文研究粗浅，相信在今后的发展中，以Huber法为代表的稳健估计各选权迭代法必将在测绘领域得到更加广泛的应用。

参考文献

[1] 朱颖,卢健康. 高速铁路工程测量技术及应用[C]//高速铁路精密测量理论及测绘新技术应用国际学术研讨会论文集,成都:西南交通大学出版社,2010:3-10

[2] 王力,李广云,张启福,等. 激光扫描中平面拟合及坐标转换模型构建[J]. 测绘科学技术学报,2012,29(2):101-104

[3] 梅红. 基于稳健估计的时序分析方法在变形监测中的应用[D].南京: 河海大学, 2005

[4] 姚宜斌,刘经南,施闯.相关稳健估计及其在测量数据处理中的应用[J].测绘信息与工程,2001(3):5-9

[5] 邱卫宁,陶本藻,姚宜斌,等. 测量数据处理理论与方法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2008

[6] 黄声享.变形监测数据处理[M]. 武汉:武汉大学出版社,2007

[7] 贾超. 稳健回归分析方法在变形监测中的应用[D]. 太原:太原理工大学,2011

第一作者简介：林飞（1990—），硕士，工程师，研究方向为精密工程测量及轨道交通工程测量。